El sistema de epiciclos y deferentes de Saturno (especialización terminal)

Christián C. Carman *

1 INTRODUCCIÓN

La Concepción Estructuralista de las Teorías ha mostrado ser una herramienta fecundísima para el análisis fino de las teorías científicas. Utilizando dicho instrumental conceptual nos proponemos analizar en detalle cómo Ptolomeo obtuvo los parámetros necesarios para aplicar el sistema de epiciclos y deferentes a un planeta particular, llegando a una especialización terminal (en cuanto al tipo). Creemos que el análisis permitirá descubrir, a la vez, virtudes de la teoría ptolemaica y nuevas distinciones conceptualmente útiles que vale la pena que sean discutidas dentro de la concepción estructuralista. La exposición del trabajo supone por parte del lector el manejo de al menos los conceptos fundamentales del instrumental estructuralista.

Dentro de las leyes especiales que forman la red teórica hay algunas que forman parte de la misma rama, esto es, que están ordenadas jerárquicamente. Ello sucede cuando la inferior tiene más variables determinadas que la superior. Así, por ejemplo, en la red teórica de la mecánica clásica de partículas, una ley especial dice que las fuerzas dependen de la distancia y otra, inferior jerárquicamente, dice cómo se da esa dependencia (por ejemplo, la de gravitación). Esta determinación de las variables puede darse, o bien por procedimientos que no agregan información teórica, por ejemplo cuando simplemente deben calcularse los valores del tiempo o la distancia (que no dependen de la teoría) o de procedimientos que sí introducen nueva información teórica, como cuando la ley dice de qué manera depende de la velocidad. El objetivo de este trabajo es mostrar que, en el Sistema de Epiciclos y Deferentes (**SED** en adelante) de Ptolomeo, la ley especial de un planeta particular (en nuestro caso Saturno, pero se da también con los otros) no agrega ninguna información teórica a las leyes de mayor jerarquía de la cual ella misma es una especialización. Es decir, que las leyes especiales más generales y la ley fundamental ya son suficientes para determinar todos los valores de la ley especial de un planeta en particular. Al final sacaremos algunas conclusiones interesantes sobre este caso.

Si esto es así, por lo tanto, la diferencia entre la ley especial de cada planeta es la determinación de ciertas variables que, para ese planeta, permanecerán constantes: posiciones iniciales, radios de epiciclos y deferentes, ubicación de puntos excéntricos, etc. Lo que nos proponemos mostrar es que para la determinación de esos valores, no hace falta nada más que las leyes especiales más generales (además de, por supuesto, algunas observaciones).

2 BREVE PRESENTACIÓN DE LA TEORÍA PTOLEMAICA DE LOS PLANETAS

Nadie mejor que Ptolomeo para definir cuál es el objetivo de su teoría planetaria. En la introducción al libro que trata el movimiento planetario, afirma:

> Ahora, nuestro objetivo es demostrar para los cinco planetas, de la misma manera que lo hemos hecho para el Sol y la Luna, que todas sus aparentes anomalías pueden ser representadas por movimientos

* Universidad Nacional de Quilmes – CONICET, Argentina. E-mail: ccarman@unq.edu.ar. Este trabajo, realizado con la ayuda del proyecto de investigación PICT Redes 2006 Nº 2007 de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, fue presentado, en el marco del *VI Encuentro de Filosofía e Historia de la Ciencia del Cono Sur*, en el Workshop "Modelos y representación en la ciencia", coordinado por Pablo Lorenzano.

uniformes y circulares, puesto que ellos son propios de la naturaleza de los seres divinos, mientras que la no-uniformidad y el desorden les son ajenos. Por lo tanto está bien pensar que el éxito en semejante propósito es una gran cosa, y ciertamente el fin propio de la parte matemática de la filosofía teórica. (Ptolomeo, *Almagesto*, H2-208; Toomer, 1998, p. 420)[1]

Por lo tanto, la ley fundamental de la teoría planetaria de Ptolomeo debería decir algo así: *para cada planeta existe un* ***SED*** *tal que la posición calculada por ese sistema es igual a la posición observada, en cualquier instante de tiempo*.

Ya hemos hecho una presentación formal de la reconstrucción de esta teoría en otro lugar (Carman 2010), aquí nos limitaremos a una presentación intuitiva. En primer lugar, entonces, habría que definir los conjuntos base que serán el conjunto de los planetas, el de instantes de tiempo y el de los puntos en el espacio. Luego habría que definir las funciones que corren sobre esos conjuntos. Tendríamos allí una función *posición* que permita ubicar cualquier punto del espacio mediante tres coordenadas: la *latitud celeste*, la *longitud celeste* – ambas expresadas en ángulos (que eran las que utilizaba Ptolomeo para ubicar un planeta sobre el fondo de estrellas fijas) – y una tercera coordenada que nos diera la distancia entre el centro de la Tierra y ese punto. Habrá que agregar una función que atribuya a cada planeta, en cada instante de tiempo, un brillo particular. También es necesario un conjunto de órbitas que estará *partido* en dos subconjuntos: el de deferentes y el de epiciclos.[2] Sobre las órbitas, a su vez, correrán algunas funciones: la primera le atribuye un punto que será el *centro* de la órbita, la segunda le atribuye un *radio* y la tercera le atribuye un *punto móvil* que será el que se desplace con una determinada *velocidad angular* (que será la cuarta función) con ese centro y ese radio. La velocidad angular medida desde un punto interior a la órbita es constante; a menos que exista un punto ecuante, ese punto coincide con el centro de la órbita. Sobre el punto móvil estará ubicado el centro del planeta (si es el último epiciclo) o el centro de la siguiente órbita (si es un deferente o un epiciclo *interior*). Que el radio de las órbitas no varíe, hará que sean circulares (porque siempre el punto móvil estará equidistante del centro), y que la velocidad angular no esté en función del tiempo garantizará que sea constante. Si queremos que el sistema admita excéntricas debemos permitir que el centro del deferente no sea el centro de la Tierra.

Ahora contamos con todos los elementos para poder describir una órbita. Pero el **SED** es, justamente, un sistema que encastra de una manera particular a varias órbitas. Deberá existir, entonces, una función que vincule órbitas, montando unas sobre otras de una manera muy precisa: una órbita *b* está montada sobre otra órbita *a* si y sólo si, en todo tiempo, la posición del centro de la órbita *b* es igual a la posición del punto móvil de la órbita *a*. El conjunto de órbitas montadas unas sobre otras formará una cadena y el punto móvil de la última órbita será el punto móvil de todo el sistema, sobre el que estará ubicado el planeta.

La ley fundamental, entonces, diría que para cada planeta existe un **SED** tal que la longitud y latitud celestes de su punto móvil coincida con la longitud y latitud celestes observada del planeta y, además, que el brillo del planeta observado sea (cualitativamente) inversamente proporcional[3] a la distancia Tierra-Planeta en cualquier instante de tiempo.

---

[1] La traducción al castellano de los textos griegos es mía. Los textos del *Almagesto* serán citados según el uso habitual, indicando el Tomo y la página de la edición clásica de Heiberg (H2-208) a lo que agregaré, para mayor comodidad, la página de la traducción de Toomer (Toomer, 1998, p. 420). La edición griega clásica, entonces, es Heiberg (1898-1903), existen 2 traducciones al inglés, de las cuales la segunda es infinitamente mejor: Taliaferro (1952) y Toomer (1988), una al francés: Halma (1813-1816) y una al alemán: Manitius (1912-1913). Como obras introductorias al *Almagesto* sin duda la mejor (aunque no sin errores) es Pedersen (1974), mucho más general y precisa es Neugebauer (1975). Una introducción didáctica pero seria a la astronomía antigua puede encontrarse en Evans (1998).

[2] En realidad son tres, pues hay que incluir el conjunto de órbitas sobre las que gira la excéntrica, en el caso que gire (como en el sistema de epiciclos y deferentes de la Luna y de Mercurio). Estas órbitas no son en sentido estricto ni deferentes ni epiciclos, pero este detalle es irrelevante para los objetivos del presente trabajo.

[3] Aquí "inversamente proporcional" debe ser leído sólo cualitativamente: es decir, a un incremento de brillo corresponde una disminución de la distancia y viceversa, ya que al brillo no se le asignaba ningún valor numérico.

3 LEYES ESPECIALES

Aquí desarrollaremos, de manera lo menos técnica posible, algunas leyes especiales del sistema, relevantes para nuestro análisis. Para una mayor simplificación, nos centraremos exclusivamente en el cálculo de la longitud celeste, dejando de lado la latitud celeste.[4]

3.1 Ley fundamental y primera ley especial común a todos los planetas

En primer lugar recordaremos la ley fundamental (recortada a la longitud):

> (LF) En todo tiempo, la longitud calculada del punto móvil del **SED** debe coincidir con la longitud observada del planeta.

Pero no es ésta la única ley que se aplica a todos los modelos. El deferente, la primera de las órbitas, da cuenta del movimiento medio del planeta, sobre el fondo de estrellas fijas, por lo tanto:

> (Ley de Revolución del Deferente: LRD) El período de revoluciones del punto móvil del deferente (o sea del centro del primer epiciclo) debe coincidir con el período de revoluciones del planeta. O, también: la velocidad angular del deferente debe ser igual a la velocidad angular media del planeta. (cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-214; Toomer, 1998, p. 424)

Estas dos, en principio, son las únicas leyes que se aplican a todos los modelos potenciales (a la órbita de cualquier planeta). Como se ve, la segunda impone una restricción sobre la primera, determinando la velocidad de la primera de las órbitas.[5]

3.2 Leyes especiales para los planetas que retrogradan

A estas dos leyes hay que agregar otras que se aplican sólo a aquellos planetas que presentan retrogradaciones en sus órbitas – es decir, a todos menos el Sol y la Luna. Como el epiciclo es agregado al deferente con la intención de dar cuenta de las retrogradaciones, Ptolomeo sostendrá que:

> (Ley de Revolución del Epiciclo: LRE) el período de revoluciones del epiciclo debe coincidir con el tiempo comprendido entre dos retrogradaciones, es decir, el epiciclo dará una vuelta por cada retrogradación. (cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-214; Toomer, 1998, p. 424)

Además, su sistema es tal que:

> (Ley de la Longitud de los Planeta: LLP) en el medio de una retrogradación que se da sobre la línea absidal – la recta sobre la que se encuentran el centro de la Tierra y el punto excéntrico –, la longitud del planeta es igual a la longitud del punto móvil del deferente (o sea, del centro del epiciclo) y del punto móvil del epiciclo.[6]

3.3 Leyes especiales para los planetas retrogradantes exteriores

Dentro de los planetas que retrogradaban, era fácil distinguir dos grupos en función de cómo se comportaban con relación al Sol: aquellos cuya elongación – es decir, su distancia angular respecto del Sol – era limitada, o sea, siempre estarían a menos de una distancia angular η y aquellos que podía encontrárselos a cualquier elongación. A los primeros los llamaremos planetas interiores y a los segundos, exteriores (cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-207; Toomer, 1998, pp. 419-420). Existen, en Ptolomeo, algunas restricciones para los planetas de un tipo y para los de otro. Veremos la de los

[4] La misma idealización hace Ptolomeo al comienzo del tratamiento de los planetas, aunque luego, por supuesto, desarrolla la teoría de las latitudes en el libro XIII. Cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-254; Toomer, 1998, pp. 443-444.

[5] En sentido estricto, el deferente no tiene por qué ser la primera de las órbitas – y no lo es en el caso de la Luna y de Mercurio, pero aquí esto no es relevante. Para una discusión más técnica, véase Carman (2010).

[6] Ver nota siguiente.

exteriores, que es la que aquí nos concierne. En ellos, sostiene Ptolomeo, se da la siguiente relación:

> (Ley de relación de las velocidades de un planeta Exterior con la velocidad del Sol: LES) el período de revolución del epiciclo más el período de revolución del deferente de un planeta es igual al período de revolución del deferente del Sol (cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-214; Toomer, 1998, p. 424).

Esta ley pretende dar cuenta de una regularidad empírica ya conocida desde los babilónicos: si contamos las vueltas que ha dado el planeta y le sumamos las retrogradaciones que se han producido en ese tiempo, el resultado coincidirá con las vueltas que ha dado el Sol (es decir, con los años transcurridos).

Pero no son éstas las únicas relaciones que la teoría ptolemaica establecía entre el movimiento de los planetas que retrogradaban y el del Sol. En efecto, ya desde antiguo se sabía que en el medio de una retrogradación, un planeta interior se encontraba más o menos en la misma línea del Sol, es decir, con elongación cercana a 0º, mientras que un planeta exterior, se encuentra en oposición al Sol, es decir, con una elongación cercana a 180º.[7] Así, la ley correspondiente a los planetas exteriores diría:

> (Ley de Elongación de un planeta Exterior: LEE) en el instante medio de una retrogradación, la elongación de un planeta exterior es aproximadamente 180º. [8]

La ley, en sentido estricto diría:

> (Segunda Ley de Elongación de un planeta Exterior: LEE 2) en el instante medio de una retrogradación, la elongación de un planeta exterior medida desde el Sol medio es exactamente 180º.

4 CÁLCULO DE LOS VALORES A PARTIR DE LAS LEYES ESPECIALES.

Recordemos que el objetivo de este trabajo es mostrar que, para el cálculo de todas las variables intervinientes en la predicción de la longitud de un planeta en particular (en este caso, Saturno) es suficiente con las leyes que hemos enunciado.

En el caso de los planetas exteriores, el **SED** consiste en un deferente excéntrico y con un punto ecuante y un epiciclo que gira sobre él. Por lo tanto, para determinar la ley especial propia de Saturno – de tal manera que, como único *input* sea necesario el tiempo para obtener como *output* la longitud del planeta – debe determinar: (I) la velocidad del deferente, (II) la velocidad del epiciclo, (III) la dirección y el valor del punto ecuante (con eso se tiene ya el del centro del deferente), (IV) la proporción entre los

---

[7] La relación es más precisa, pero expresarlo implica nuevas complicaciones por lo que dejaremos en el cuerpo del texto la versión simplificada de la ley y explicaremos en esta nota los detalles. En realidad, la relación no se debe medir con la elongación del Sol, sino del Sol medio. El Sol medio es un término teórico elaborado por Ptolomeo que representa el punto en el que se encontraría el Sol si tuviera un movimiento uniforme. Ptolomeo eligió para el Sol un sistema con una sola órbita, pero excéntrica. Podría haber elegido un sistema con un deferente con centro en el Sol y un epiciclo – de hecho él analiza ambas posibilidades –, si hubiera elegido el sistema de epiciclo y deferente, el Sol medio representaría el centro del epiciclo. Por otro lado la elongación con el Sol medio es 0º en el caso de los planetas interiores y 180º en el de los exteriores sólo cuando el centro de la retrogradación se produce sobre la línea absidal, es decir, en la misma línea de la que hablaba LLP. Mientras LLP ubicaba en línea recta al planeta, el centro y el punto móvil del epiciclo, estas leyes agregan que el Sol está alineado también con ellos en ese instante, en el caso de los planetas interiores del mismo lado y, en el de los exteriores, del otro lado de la Tierra, pero siempre sobre la misma recta.

[8] Cfr. Ptolomeo, *Almagesto*, H2-319-320, ; Toomer, 1998, p. 483. En este texto se expresa LEE combinada ya con LLP, es decir coloca bajo la misma línea al planeta (y por lo tanto el punto móvil del epiciclo) al centro del epiciclo, a la excéntrica, a la Tierra y al Sol medio más la del Sol relacionada y mencionado, incluso, lo de las paralelas, para los planetas exteriores. Y agrega lo que podría ser un teorema derivado de la combinación de LEE, LLP y LRD y LRE ya que si en un momento están alienadas y las velocidades son constantes, la línea que une el centro del epiciclo con el centro del deferente (el punto excéntrico) es siempre paralela a la línea que une a la Tierra con el Sol medio.

radios del epiciclo y del deferente y la dirección de giro del epiciclo, (V) valores iniciales o raíces que comprenden la longitud media, la anomalía media y la longitud del apogeo en un instante 0.

$f\left(\omega_{def}, \omega_{epi}, e, {}^{R}/_{r}, ci, t\right) = \lambda$ siendo $ci = \{\lambda m_o, am_o, \lambda a_o\}$

4.1 I y II: Velocidades del deferente y del epiciclo

Para determinar la velocidad del deferente contamos con **LRD** que vinculaba la velocidad del deferente con la velocidad angular media del planeta. Ésta última puede medirse empíricamente. A su vez, para determinar la velocidad del epiciclo contamos con **LRE** que vincula la velocidad del epiciclo con el tiempo que transcurre entre retrogradaciones, que también puede medirse empíricamente. Así, estas dos leyes bastarían para determinar los valores de las velocidades. Sin embargo, el sistema está sobredeterminado, en el sentido técnico matemático según el cual hay un exceso de datos para resolver un problema. En efecto, con cualquiera de las dos leyes y la **LES**, si se conoce la velocidad media del Sol, puede determinarse el valor de ambas velocidades sin necesidad de recurrir a la otra ley. Es decir, si se sabe que en 59 años Saturno ha dado sólo dos vueltas, sabré que ha retrogradado, en ese tiempo, 57 veces. Expresado a nivel teórico diré que la velocidad del deferente de Saturno es de:

$$\frac{2\text{ vueltas}}{59\text{ años}} = 0{,}0338\ \textit{vueltas por año}$$

y, por lo tanto, la del epiciclo será de:

$$\frac{59 - 2 = 57\text{ vueltas}}{59\text{ años}} = 0{,}9661\ \textit{vueltas por año}$$

Hiparco había establecido, justamente, esa proporción para Saturno, pero Ptolomeo la corrige diciendo que cada 57 retrogradaciones, Saturno da 2 vueltas más 1;43º, y esto sucede en 59 años y 1 ¾ de día. Sin entrar en detalles técnicos, se ve claramente que las dos leyes especiales **LRD** y **LRE** o cualquiera de ellas combinada con **LES** y ciertos datos observables (no teóricos para el sistema de Ptolomeo) bastan para determinar la velocidad angular del epiciclo y del deferente.

Los valores finales de Ptolomeo serán, para el epiciclo:

$$\omega_{epi} = \frac{57 \cdot 360^\circ}{59 \cdot 365;14{,}48 + 1;45} = 0;57{,}7{,}43{,}41{,}43{,}40\ \textit{grados por día}$$

Esto quiere decir que su período medio del epiciclo es:

$$T_{epi} = \frac{360^\circ}{\omega_{epi}} \approx 378.09\ \textit{días}$$

Y para el deferente:

$$\omega_{def} = \frac{2 \cdot 360^\circ + 1;43^\circ}{59 \cdot 365;14{,}48 + 1;45} = 0;2{,}0{,}33{,}31{,}28{,}51\ \textit{grados por día}$$

Esto quiere decir que su período medio de longitud es:

$$T_{def} = \frac{360^\circ}{\omega_{def}} \approx 10743\ \textit{días} \approx 29.41\ \textit{años}$$

Finalmente queda por determinar la dirección de giro del epiciclo (la del deferente es la misma que la del planeta sobre el fondo de estrellas fijas – ya que tiene que dar cuenta del movimiento medio del planeta). La dirección de giro se determina de una manera muy sencilla. El hecho de que el brillo del planeta aumente en las retrogradaciones es un fuerte índice de que en el momento de la retrogradación se encuentra más cerca de la Tierra y eso sólo puede explicarse con el epiciclo girando en la misma dirección que el deferente.

4.2 III: La dirección y la distancia del punto ecuante

Hemos calculado la velocidad del deferente aun sin haber podido observar ni siquiera una posición del centro del deferente (que es teórico) gracias a **LRD**. Pero para saber si el centro del deferente se desplaza con esa velocidad de manera constante o no, medido desde la Tierra, tengo que poder ubicar el centro del deferente en algunos instantes y comparar la velocidad medida empíricamente con la calculada. Ubicar el centro del deferente no parece una tarea sencilla porque, mientras que la posición del punto móvil del epiciclo coincide con la del planeta, que es observable, no hay ninguna entidad observable que se encuentre en el centro del deferente.

Sin embargo, la ley **LLP** implica que, en el instante medio de una retrogradación, la longitud del deferente, del epiciclo y del planeta coinciden. Si, además, la vinculamos con la ley **LEE2** que afirmaba que en el instante medio de una retrogradación, la elongación de un planeta exterior medida desde el Sol medio es exactamente 180º, sabremos que ese instante es el medio de una retrogradación. Dicho de otra manera: observaciones de oposiciones (al Sol medio) nos da la posición del centro del epiciclo (el punto móvil del deferente) y podemos medir (casi)[9] empíricamente la elongación media de un planeta. Ptolomeo partirá de 3 oposiciones medias:

	Fecha y lugar	**Longitud**
1	Hadrian 11, Pachon 7/8, 6 h. en Alejandría	181;13º
2	Hadrian 17, Epiphi 18, 4 h. en Alejandría	249;40º
3	Hadrian 20, Mesore 24, mediodía de Alejandría	284;14º

El problema se reduce a lo siguiente. Partimos de tres observaciones del planeta. Tenemos, por lo tanto, como datos, primero el tiempo transcurrido entre las observaciones y, segundo, las longitudes verdaderas de los planetas. Tener las longitudes verdaderas de las oposiciones es tener – por **LEE2** y **LLP**- las longitudes del punto móvil del deferente. Al tener también los tiempos transcurridos, podemos calcular el desplazamiento en longitud media del planeta, es decir, lo que el punto móvil del deferente debe haberse desplazado angularmente visto desde el punto en el que la velocidad del deferente es constante. El problema es obtener ese punto, que será, justamente, el punto ecuante.

En el gráfico se representan las observaciones 1, 2 y 3 que, como son oposiciones, corresponden al centro del epiciclo. Sabemos que los tiempos transcurridos entre ellos son:

$t_2 - t_1 = 6^a\ 70^d\ 22^h$
$t_3 - t_2 = 3^a\ 35^d\ 20^h$

Y las diferencias de longitud verdadera entre ellos son:

$\lambda_2 - \lambda_1 = 249;40º - 181;13º = 68;27º$
$\lambda_3 - \lambda_2 = 284;14º - 249;40º = 34;34º$

[9] Casi por dos razones. Primero porque, lo que podría medir empíricamente es la elongación verdadera, es decir la diferencia angular entre el planeta y el Sol, no entre el planeta y el Sol medio que es una entidad teórica. Sin embargo, para calcular la posición del Sol medio basta con conocer un equinoccio de marzo y la velocidad media del Sol. Segundo porque, por lo general, las elongaciones, medias o verdaderas, no se observan y nunca se observa la elongación de una oposición porque el Sol se encuentra a 180 grados de un planeta (excepto en un eclipse lunar donde se observa la sombra de la Tierra que se encuentra a 180 grados del Sol).

Pero, como ya tenemos las tablas, podemos calcular la diferencia en las longitudes medias (no las verdaderas).

En 6ª 70ᵈ 22ʰ, Saturno recorre: 75;43º y
En 3ª 35ᵈ 20ʰ, Saturno recorre: 37;52º

$\lambda_{2m} - \lambda_{1m} = 75;43º$
$\lambda_{3m} - \lambda_{2m} = 37;52º$

No seguiremos aquí todo el desarrollo geométrico pero es claro que existe un único punto desde el que se respetan estas condiciones.

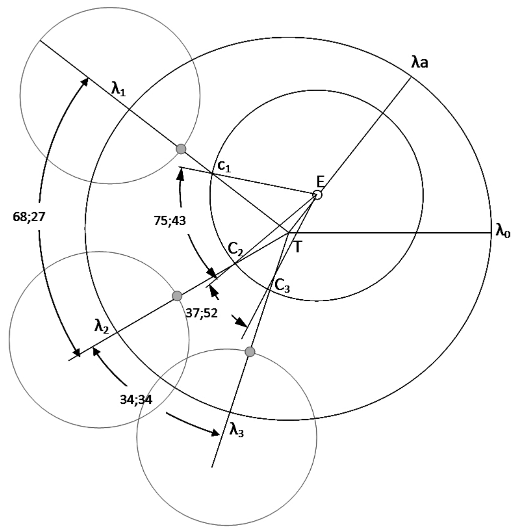

Figura 1

Finalmente obtiene que la distancia entre la Tierra y el punto ecuante es de 6;50 partes de las que el deferente mide 60 y la longitud del apogeo (λ_a) = 233º

4.3 IV: El cálculo del epiciclo

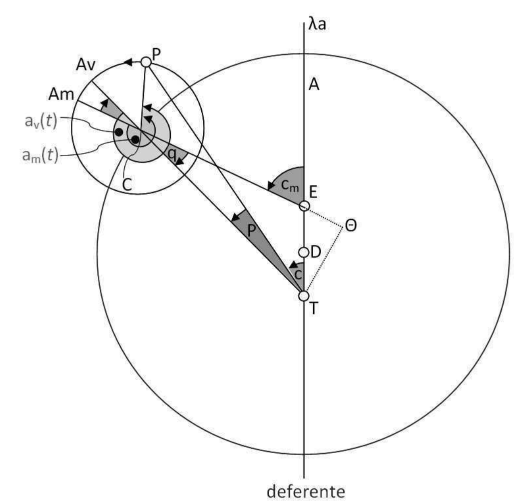

Figura 2

Ahora debemos determinar: la proporción que hay entre los radios del epiciclo y del deferente.

Para calcular los valores del epiciclo introduciremos dos nuevos conceptos: el de argumento verdadero y el de argumento medio (*medium argumentum* $a_m(t)$ y *verum argumentum* $a_v(t)$). Ver figura 2. El argumento medio es la distancia angular entre el punto P (en donde se encuentra el planeta) y el apogeo medio (Am) del epiciclo, medido desde C, el centro del epiciclo. El apogeo medio del epiciclo es el punto más lejano al punto ecuante que puede alcanzar un planeta. El argumento medio se mide siempre en el sentido de giro del planeta. La velocidad del epiciclo, medida como la variación del argumento medio, es constante.

El argumento verdadero es la distancia angular entre el punto P y el apogeo verdadero (Av) de epiciclo, medido siempre desde C. El apogeo verdadero es el punto más lejano que puede tener el planeta sobre el epiciclo medido desde T, la Tierra.

Del gráfico se sigue que

$$a_v = a_m(t) \pm q(c_m)$$

Es decir, que el argumento verdadero es igual al argumento medio más o menos ese ángulo *q*.

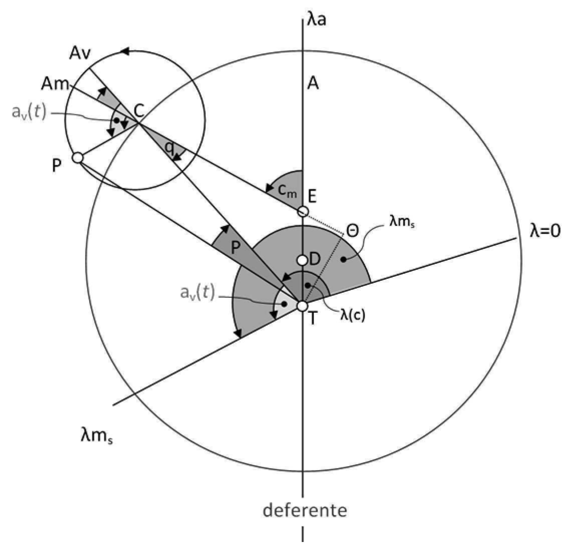

Figura 3

Evidentemente el radio del epiciclo no puede medirse en oposiciones, porque en ese caso está perpendicular a la Tierra. Por lo tanto, Ptolomeo utilizará una nueva observación, la número 4 de Antoninus 2, Mechir 6/7, 8 h en Alejandría, con una longitud para Saturno de 309;4º. Si a la longitud le restamos la longitud del apogeo (λa = 233º), obtenemos el valor del centro verdadero (el ángulo ATP).

Además, como conocemos el tiempo transcurrido entre la observación 4 y la tercera ($t_4 - t_3 = 2^a\ 167^d\ 8^h$) y el valor de c_m en la tercera, podemos calcular (utilizando ω_{def}) el ángulo c_m de la cuarta observación. Con esos datos podemos obtener $q(c_m)$ mediante un cálculo exclusivamente geométrico que utiliza el triángulo rectángulo punteado.

Como la tercera era una oposición, también sabíamos que a_m debería estar cerca de 180, sería 180 si la oposición hubiera sido sobre la línea absidal. Cuando no lo es, a_m es igual a 180 menos el ángulo *q*.

Conociendo, entonces, el a_m de la tercera observación y ω_{epi} podemos calcular, también el ángulo a_m de la cuarta observación.

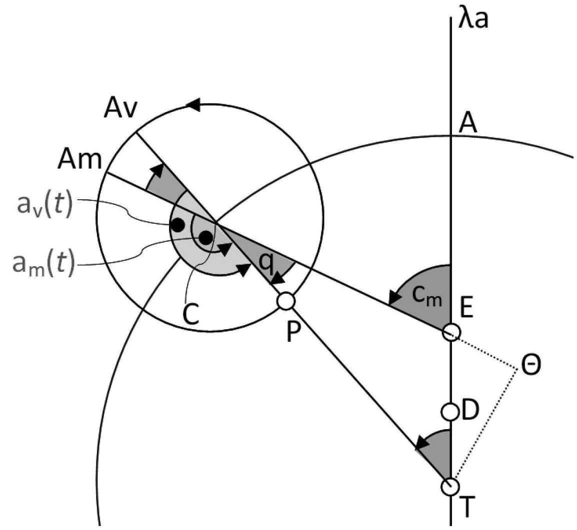

Figura 4

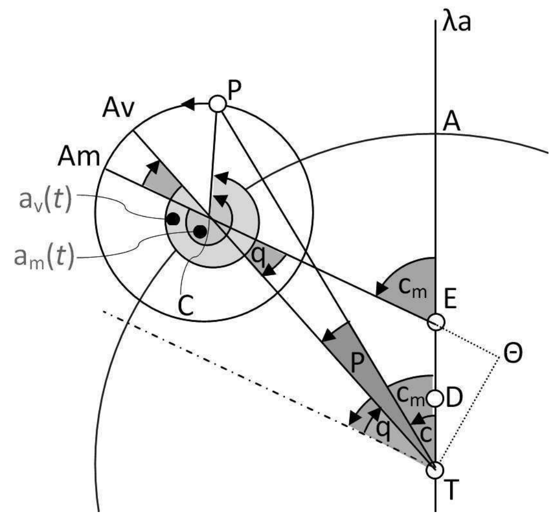

Figura 5

De la figura 5 se sigue que

$$c_m = q + c + p$$

Donde p es el ángulo (prosthaphairesis) que expresa el radio del epiciclo CP visto desde la Tierra. Conocemos ya c_m, c y q, por lo que puede obtenerse p.

En el triángulo PCT, el ángulo centrado en C (PCT) es igual a

$$PCT = a_m - 180º + q$$

Y todos los valores ya son conocidos. Conocemos también el valor del ángulo centrado en T (que es p). Por lo tanto, podemos calcular el valor del ángulo centrado en P (CPT).

Ahora nos debemos centrar en el triángulo ECT. Conocemos el valor del ángulo E a partir de c_m (180- c_m). También conocemos el ángulo centrado en T (= $c + p$) y el lado TE (la distancia de la ecuante), por lo tanto, conociendo 2 ángulos y un lado, podemos calcular los otros dos lados. A nosotros nos interesa TC.

Ahora miramos el triángulo TCP nuevamente, recordando que conocemos el ángulo centrado en T, que es p, y el ángulo centrado en C (PCT, que ya habíamos calculado) y que conocemos un lado, TC, por lo que podemos calcular también los otros, a nosotros nos interesa el lado CP que es, justamente, el radio del epiciclo. El resultado es CP = $r = 6;30^p$

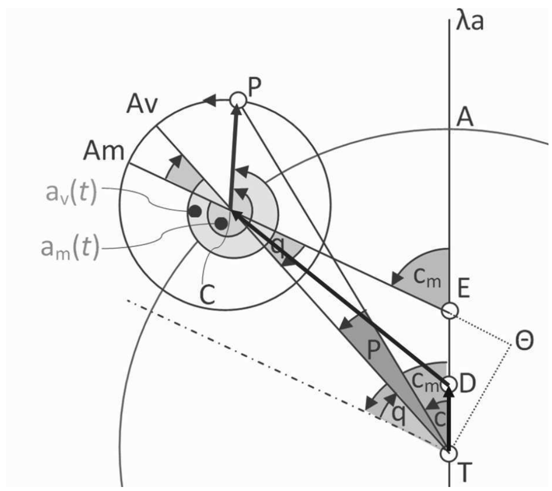

Figura 6

4.4 V: El cálculo de las raíces

Como hemos visto, Ptolomeo construyó todo el sistema con sólo 4 observaciones que distan, entre ellas, apenas 10 años y medio, pero una revolución completa de Saturno lleva, como habíamos visto, más de 29 años, por lo que sería muy riesgoso que no pusiera a prueba el sistema. Ptolomeo lo hace (Ptolomeo, *Almagesto*, H2 419), analizando una fecha muy anterior, la observación 5 de Nabonassar 519, Tybi 14, 6 h en Mesopotamia.

Finalmente obtiene las raíces del sistema. Conociendo ya todos los valores de una observación, los cálculos no presentan ninguna dificultad, basta tomar los datos de la observación más antigua (en nuestro caso la quinta) y retrotraerse hasta Thoth 1, Nabonassar 1 (el tiempo 0 para la astronomía ptolemaica). Los resultados son:

$\lambda_m(t_0) = 296;44º$
$a_m(t_0) = 34;2º$
$\lambda_a(t_0) = 224;10º$

Un detalle final: de las leyes **LLE2** y **LLP** sabemos que, en el momento medio de una retrogradación, el vector que une a la Tierra con el Sol medio tiene misma dirección y sentido (es paralelo y apunta para el mismo lado) que el que une al centro del epiciclo con el planeta. Si además, tenemos en cuenta la ley **LES**, sabremos que esa relación se mantiene siempre. Si derivamos esa relación, obtenemos la relación no de las velocidades, sino de las posiciones, en este caso, de las longitudes: la longitud media solar es igual a la longitud media del planeta más su anomalía media.

$$\lambda m_s = \lambda_m + a_m$$

Podemos verificar que esta relación se mantiene en los valores del momento inicial, recordando que la longitud solar en ese momento era de 330;45º. La suma de la $\lambda_m(t_0) + a_m(t_0) = 296;44^\circ + 34;2^\circ = 330;46$, una diferencia de apenas un minuto.

Como hemos visto, entonces, es posible calcular todas las constantes de un planeta sólo utilizando las leyes especiales de mayor jerarquía más cuatro observaciones.

5 CONCLUSIONES

El resultado obtenido puede ser funcional para los siguientes objetivos:

En primer lugar, permite mostrar claramente que existe una distinción entre tipos de leyes especiales: algunas que agregan información teórica a sus superioras y otras que simplemente completan las variables mediante procedimientos que no tienen novedad teórica. Haberlo mostrado en un caso concreto nos provee de un ejemplo que puede ser utilizado como base empírica para nuevas reflexiones epistemológicas sobre la distinción entre estos tipos de leyes.

En segundo lugar, el recorrido que hemos hecho también sirve para probar que la reconstrucción estructuralista de la teoría de epiciclos y deferentes está completa, ya que si es posible llegar a predicciones concretas a partir de la ley fundamental más las especiales y algunos datos, quiere decir que no existen lagunas en la reconstrucción.

Finalmente, y este es el más importante, el camino recorrido muestra que no había una adhocidad ilegítima en la construcción del modelo de cada planeta. Esta conclusión espera por un desarrollo técnico mayor, pero la idea intuitiva es la siguiente: si para obtener los valores de cada planeta en particular, Ptolomeo debía agregar contenidos teóricos exclusivos para cada planeta, parecería que la teoría, en última instancia, no tiene el tipo de unidad que se suele exigir a las teorías – ya que en el fondo, habría una teoría particular para cada planeta –; mientras que si, como hemos mostrado, de ciertas leyes que valen para otros planetas (algunas que valen para todos, y otras que valen para todos los de un tipo) se puede derivar la ley especial de un planeta en particular, se ha logrado la unidad deseada. Pero, insisto, esta intuición merece un desarrollo mayor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARMAN, Christián. El sistema de epiciclos y deferentes de Ptolomeo: una reconstrucción. *In*: LORENZANO, Pablo (ed.). *Nuevos desarrollos de la meta-teoría estructuralista*. México, 2010 (en prensa)

HALMA, Nicolas (trad.). *Composition mathématique de Claude Ptolémée*. 2 vols. Paris: Chez Henri Grand, 1813-1816.

HEIBERG, J. L. (ed.). *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Vol. I, Syntaxis Mathematica*. Leipzig: Teubner, 1898-1903.

EVANS, James. *The history and practice of ancient astronomy*. Oxford: Oxford University Press: 1998.

MANITIUS, Karl (trad.). *Ptolemäus, Handbuch der Astronomie*. 2 vols. Leipzig: Teubner, 1912-1913.

NEUGEBAUER, Otto. *A history of ancient mathematical astronomy. Studies in the history of mathematics and physical sciences*. 3 vols. Berlin: Springer, 1975.

PEDERSEN, Olaf. *A survey of the Almagest*. (Acta Historica Scientirarum Naturalium et medicinalium. vol. 30). Odense: Odense University Press, 1974.

TALIAFERRO, R. Catesby (trad.). *The Almagest by Ptolemy*. (Great Books of the Western World, vol 16). Chicago: Encyclopaedia Britannica: 1952.

TOOMER, Gerald (trad.). *Ptolemy's Almagest*. Princeton: Princeton University Press, 1998.