Resultados recientes del formalismo de contextos generalizados para historias cuánticas

Marcelo Losada *, *Roberto Laura* †

1. Introducción

El desarrollo de las teorías de historias cuánticas estuvo motivado por dos aspectos de la mecánica cuántica estándar, calificados de insatisfactorios por algunos autores. Uno de ellos de carácter interpretativo, a saber, el tratamiento de la medición como un proceso físico particular, distinto del resto de las interacciones físicas; y otro de carácter formal, a saber, la incapacidad de describir operaciones lógicas entre propiedades, como la conjunción, la disyunción o la negación, a distintos tiempos.

La interpretación estándar de la mecánica cuántica provee un exitoso algoritmo para predecir los resultados de las mediciones experimentales. Sin embargo, la distinción tajante entre los procesos de medición y el resto de los procesos físicos conduce a ciertas dificultades interpretativas. En particular, no es aplicable a sistemas cerrados en los cuales se incluyen a los aparatos de medición. Esto resulta de fundamental importancia en el caso de la cosmología cuántica, en la que el sistema físico es el universo en su totalidad.

Por otro lado, si bien el formalismo estándar de la mecánica cuántica permite definir operaciones lógicas entre propiedades (Birkhoff, von Neumann, 1936) (Vanni, Laura 2, 2013), como todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo, no es posible combinar propiedades a distintos tiempos. Sin embargo, en muchos procesos físicos es necesario considerar expresiones que involucren propiedades en diferentes instantes. Por ejemplo, una propiedad de un sistema microscópico en un dado instante antes de una medición tiene que ser relacionada con una propiedad del aparato de medición después de la medición.

Para superar estas dificultades se desarrollaron diferentes teorías de historias cuánticas. En 1984 Griffiths presentó la primera versión de la teoría de historias consistentes (Griffiths, 1984), y años después presentó algunas modificaciones de aquella versión (Griffiths, 2002) (Griffiths, 2013). Por otro lado, Omnès publicó una serie de artículos y libros en los que contribuyó al desarrollo de esta teoría (Omnès, 1988) (Omnés, 1994) (Omnés, 1999). Paralelamente, Gell-Mann y Hartle desarrollaron un formalismo de historias similar al de historias consistentes denominado *historias decoherentes* (Gell-Mann, Hartle, 1990). Si bien estas teorías no son idénticas, sus fuertes similitudes justifican que se las englobe bajo el término de teoría de historias consistentes.

La teoría de historias consistentes pretende resolver las dos dificultades mencionadas

* Instituto de Física Rosario, Argentina. marcelolosada@yahoo.com
† Universidad Nacional de Rosario, Argentina. rlaura@fceia.unr.edu.ar

previamente. Por un lado, provee una interpretación de la mecánica cuántica en la que los procesos de medición son tratados de la misma forma que el resto de los procesos físicos. La medición pierde su estatus privilegiado y pasa a ser descripta como una interacción física ordinaria entre un sistema a ser medido y un aparato de medición. La dinámica de la medición es descripta por la ecuación de Schrödinger y, en consecuencia, ya no se requiere el postulado adicional del colapso del vector de estado. Por lo tanto, resulta aplicable a sistemas cerrados en los cuales se incluyen los aparatos de medición, lo que es de suma importancia para el estudio de la cosmología cuántica.

Por otro lado, extiende el formalismo estándar de la mecánica cuántica de modo tal de poder definir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos. Para ello introduce la noción de historia que generaliza a la noción de evento. Una historia se define como una secuencia de eventos a distintos tiempos u operaciones lógicas entre ellas, como la conjunción, la disyunción o la negación. A las primeras se las denomina historias elementales y a las segundas historias compuestas.

Por ejemplo, si consideramos *n* tiempos, $t_1 < \ldots < t_n$, y las propiedades p_i y q_i en cada tiempo t_i, entonces $\breve{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es la historia elemental en la que en cada tiempo t_i se da la propiedad p_i y $\breve{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ es la historia elemental en la que en cada tiempo t_i se da la propiedad q_i. Por otro lado, $\breve{p} \vee \breve{q}$, $\breve{p} \wedge \breve{q}$ y $\neg \breve{p}$ son historias compuestas que resultan de las operaciones lógicas (disyunción, conjunción y negación, respectivamente) entre las historias $\breve{p}$ y $\breve{q}$.

Al igual que en el caso de la propiedades a un tiempo, no es posible asignar probabilidades al conjunto de todas las historias. Por lo tanto, primero se debe seleccionar un subconjunto de ellas que satisfaga ciertas condiciones. Las teorías de historias cuánticas postulan condiciones para decidir qué conjuntos de historias se pueden predicar legítimamente de un sistema y asignarles probabilidades.

En el caso de la teoría de historias consistentes, para que sea posible referirse a propiedades pertenecientes a contextos a distintos tiempos los contextos deben satisfacer ciertas condiciones denominadas *condiciones de consistencia*. Estas condiciones tienen la particularidad de depender del estado del sistema, situación muy diferente a lo que ocurre en el formalismo estándar de la mecánica cuántica, en el cual los estados se definen como funcionales lineales sobre los observables del sistema. Como las historias cuánticas juegan el rol de observables es razonable esperar que los conjuntos de historias permitidos no dependan del estado del sistema. Además, la condición de consistencia permite demasiadas familias de historias, algunas de las cuales son de difícil interpretación (Dowker, Kent, 1996) (Laloë, 2001). En particular, se ha mostrado que en la teoría de historias consistentes la excesiva libertad de familias de historias hace posible la retrodicción de propiedades contrarias (Hartle, 2007) (Kent, 1997) (Kent, 1998).

En vistas de superar estas dificultades, uno de los autores y Leonardo Vanni desarrollaron el formalismo de Contextos Generalizados (Laura, Vanni, 2008) (Laura, Vanni, 2008b) (Laura, Vanni, 2009). La idea central de este formalismo es imponer la condición de consistencia para todos los estados cuánticos. Al hacer esto se obtiene una condición de compatibilidad para los contextos de propiedades a tiempos diferentes que consiste en la conmutación de sus correspondientes proyectores al ser trasladados a un instante común. Esta nueva condición, al ser más limitativa, ha mostrado ser beneficiosa para solucionar algunos problemas que aparecen en la teoría de historias consistentes, entre ellos la retrodicción de propiedades contrarias (Losada, Laura, 2014).

En trabajos anteriores hemos aplicado nuestro formalismo para describir el experimento de la doble ranura (Losada, Vanni, Laura, 2013), la lógica del proceso de medición (Vanni, Laura, 2013), y el proceso de decaimiento cuántico (Losada, Laura, 2013). También hemos demostrado que al imponer la condición de consistencia para todos los estados posibles del sistema, la teoría de historias que resulta es equivalente al formalismo de contextos generalizados (Losada, Laura, 2014).

En este trabajo se presenta un breve resumen del formalismo de contextos generalizados y se analiza el problema de inferencias de propiedades contrarias en el formalismo estándar de la mecánica cuántica, en la teoría de historias consistentes y en nuestro formalismo de contextos generalizados.

2. Contextos generalizados

La teoría de historias consistentes resulta adecuada para describir propiedades en instantes diferentes y permite calcular probabilidades bien definidas sobre familias de historias consistentes. Sin embargo se debe destacar que, puesto que las condiciones de consistencia dependen del estado inicial, las familias de historias admisibles dependen de las condiciones iniciales en las que se encuentra el sistema (Laura, Vanni, 2009). Esto es diferente de lo que sucede en el formalismo estándar de la mecánica cuántica, donde los contextos de propiedades admisibles no dependen del estado.

Motivados por esta dificultad conceptual, Autor 2 y Leonardo Vanni desarrollaron un formalismo alternativo de historias cuánticas denominado enfoque de *contextos generalizados*, que independiza el conjunto de historias cuánticas consistentes del estado inicial del sistema.

El enfoque de contextos generalizados se basa en la noción de traslación temporal de propiedades. Al igual que en el caso de la teoría de historias consistentes, para que las probabilidades estén bien definidas hacen falta condiciones adicionales sobre los conjuntos de historias. En este caso la condición de compatibilidad adicional a imponer sobre las propiedades a diferentes tiempos es la conmutación de los correspondientes proyectores cuando son trasladados a un tiempo común. A continuación de describe brevemente las ideas centrales de este formalismo.

Sea un sistema físico cuyo espacio de Hilbert es H y cuya dinámica está gobernada por el operador de evolución temporal $U(t',t)$ (Ballentine, 1998). Las propiedades del sistema, al igual que en la mecánica cuántica estándar, se representan por subespacios del espacio de Hilbert o por sus respectivos proyectores (Birkhoff, von Neumann, 1936) (Losada, Vanni, Laura, 2013) (Von Neumann, 1932). Los eventos del sistema se definen como propiedades a un dado tiempo y se representan con un par (V,t), donde V es el subespacio que representa a la propiedad y t es el tiempo del evento.

Dado un evento (V,t), decimos que (V',t') es una traslación temporal de (V,t) si $V'=U(t',t)V$. A partir de la noción de traslación temporal de eventos se define una relación de equivalencia de la siguiente manera

$$(V',t')\sim(V,t) \longleftrightarrow V'=U(t',t)V$$

Al conjunto de todos los eventos equivalentes por traslación temporal a (V,t) se lo denomina clase de eventos $[V,t]$, esto es,

$$[V,t]=\{(V',t')|(V',t')\sim(V,t)\}.$$

En el formalismo de contextos generalizados, una historia cuántica se representa mediante una clase de eventos. Por ejemplo, una historia de la forma "*el sistema posee la propiedad* V *en el instante* t" se representa mediante la clase $[V,t]$. A su vez, la disyunción y la conjunción entre historias están dadas por

$$[V,t]\vee[V',t']=[U(t_0,t)V+U(t_0,t')V',t_0],$$
$$[V,t]\wedge[V',t']=[U(t_0,t)V\cap U(t_0,t')V',t_0],$$

donde t_0 es un instante arbitrario.

A partir de este formalismo es posible representar historias que involucren propiedades en instantes diferentes. Dados *n* instantes, se considera un contexto de propiedades por cada instante t_i, cuyos proyectores $\Pi_i^{k_i}$ satisfagan

$$\Pi_i^{k_i}\Pi_i^{k'_i}=\delta_{k_i k'_i}\Pi_i^{k_i} \quad , \quad \sum_{k_i\in\sigma_i}\Pi_i^{k_i}=I \quad .$$

Para considerar historias que involucren propiedades de cualquiera de estos contextos a distintos instantes es necesario que tales contextos puedan ser incluidos en un contexto común. Para ello, el enfoque de contextos generalizados impone la condición de que los proyectores de cada contexto trasladados a un tiempo común conmuten, es decir,

$$[\Pi_{i0}^{k_i},\Pi_{jo}^{k_j}]=0 \qquad \forall k_i\in\sigma_i,\forall k_j\in\sigma_j,1\le i,j\le n$$

donde $\Pi_{i0}^{k_i}=U(t_0,t_i)\Pi_i^{k_i}U^{-1}(t_0,t_i)$ y $\Pi_{j0}^{k_j}=U(t_0,t_j)\Pi_j^{k_j}U^{-1}(t_0,t_j)$. Dicha condición se denomina *condición de compatibilidad* y los contextos que la satisfacen se dicen *compatibles*.

A partir de contextos compatibles se puede formar un nuevo contexto que los incluya, en el cual es posible representar historias que involucren conjunciones y disyunciones de propiedades a distintos instantes.

La probabilidad de las historias se define generalizando la regla de Born. Dada una clase de eventos, que representa una historia, su probabilidad está dada por

$$\Pr[V,t_0]=Tr(\rho_{t_0}\Pi_V),$$

donde ρ_{t_0} es el estado del sistema en el instante t_0 y Π_V es el proyector correspondiente a la propiedad V. Esta probabilidad está bien definida, y satisface los axiomas de Kolmogorov.

El enfoque de contextos generalizados presenta ciertas características de interés frente al formalismo de historias consistentes. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

(i) La condición de compatibilidad entre propiedades a distintos instantes es una generalización inmediata y natural de la condición de conmutación para observables compatibles, la cual es usual en la mecánica cuántica.

(ii) A diferencia de lo que ocurre en la teoría de historias consistentes, la estructura lógica de propiedades admisibles para el enfoque de contextos generalizados es independiente del estado del sistema.

(iii) La condición de compatibilidad de este enfoque implica la condición de consistencia del formalismo de historias consistentes (Laura, Vanni, 2009). Además, si se exige la condición de consistencia para todo estado inicial, entonces ambas condiciones resultan equivalentes (Losada, Laura, 2014).

El formalismo de contextos generalizados impone una condición de compatibilidad más restrictiva que la teoría de historias consistentes. Esta nueva condición, al ser más limitativa, ha mostrado ser beneficiosa para solucionar algunos problemas que aparecen en la teoría de historias consistentes, como es el caso de la retrodicción de propiedades contrarias. En la siguiente sección se discute esta cuestión en ambos formalismos y se muestran sus diferencias.

3. Propiedades contrarias

En la teoría de historias consistentes las predicciones y retrodicciones probabilísticas dependen de la familia de historias consistentes elegida. Se ha mostrado que esta libertad permite la retrodicción de propiedades contrarias. Dos propiedades *p* y *q* se denominan contrarias si verifican $p\leq\neg q$. Adrian Kent encontró un estado ρ_0 al tiempo t_0, dos propiedades contrarias *p* y *q* al tiempo t_1 y otra propiedad r al tiempo t_2, con $t_0<t_1<t_2$, tales que se verifica $\Pr_{\rho_0}(p,t_1|r,t_2)=1$ y también $\Pr_{\rho_0}(q,t_1|r,t_2)=1$. De acuerdo con estas dos expresiones, existe entonces un estado al tiempo t_0 y una propiedad al tiempo t_2 que implica dos propiedades contrarias al tiempo t_1 (Kent, 1997).

Para los defensores de esta formulación no es necesariamente un problema porque cada retrodicción se obtiene en una familia de historias distinta, es decir, en diferentes descripciones del sistema físico que no pueden ser consideradas simultáneamente (Griffiths, Hartle, 1998) (Hartle, 2007). Sin embargo, para algunos autores es considerado un grave problema para la teoría (Kent, 1997) (Kent, 1998) (Okon, Sudarsky, 2014).

Hemos analizado este problema utilizando el formalismo de contextos generalizados (Losada, Laura, 2014) y hemos demostrado que debido a tener una condición de compatibilidad más restrictiva no es posible obtener retrodicciones de propiedades contrarias.

Primero analizaremos el caso de las inferencias de propiedades contrarias en el formalismo estándar de la mecánica cuántica. En la siguiente sección demostraremos que no es posible obtener inferencias de propiedades contrarias en dicho formalismo.

a. Propiedades contrarias en mecánica cuántica ordinaria

En mecánica cuántica una propiedad p se representa por un proyector ortogonal Π_p sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema, o alternativamente, por su correspondiente subespacio cerrado $V_p = \Pi_p H$. Por definición (Kent, 1997), dos propiedades p y q se dicen *contrarias* si satisfacen la relación de orden $p \leq \overline{q}$. Esta relación, escrita en términos de los correspondientes subespacios, se expresa de la siguiente manera

$$\Pi_p H \quad (I-\Pi_q)H \tag{1}$$

Por otro lado, como la inclusión de subespacios tiene una manera de expresarse a partir de los proyectores asociados a los subespacios (Mittelstaedt, 1978), la ecuación (1) puede formularse de la siguiente forma

$$\Pi_p(I-\Pi_q) = (I-\Pi_q)\Pi_p = \Pi_p$$

A partir de esta última expresión es fácil ver que $\Pi_p\Pi_q = \Pi_q\Pi_p = 0$, lo que significa que los proyectores Π_p y Π_q conmutan y, por lo tanto, representan propiedades compatibles.

Luego, los proyectores Π_p, Π_q y $\Pi_{\overline{p\vee q}}$ forman una descomposición proyectiva de la identidad, es decir, son ortogonales y suman la identidad. Por lo tanto, las propiedades p, q y $\overline{p\vee q}$ pueden considerarse propiedades atómicas que generan un contexto de propiedades con probabilidades bien definidas (Losada, Laura, 2014).

Para cualquier estado del sistema representado por un operador de estado ρ, la probabilidad de una propiedad p' se obtiene a partir de la regla de Born, es decir, $\Pr_\rho(p') = Tr(\rho\Pi_{p'})$. En particular, para las propiedades atómicas se obtiene

$$\Pr_\rho(p)+\Pr_\rho(q)+\Pr_\rho(\overline{p\vee q}) = 1 \tag{2}$$

A partir de estas ecuaciones se deduce fácilmente que si $\Pr_\rho(p)=1$, entonces $\Pr_\rho(q)=0$ y si $\Pr_\rho(q)=1$, entonces $\Pr_\rho(p)=0$.

Por lo tanto, concluimos que en mecánica cuántica ordinaria es imposible que dos propiedades contrarias p y q tengan probabilidad igual a uno para el mismo estado. Estos resultados pueden ser interpretados de la siguiente manera: si la propiedad p (q) es verdadera, entonces la propiedad q (p) es falsa. Este resultado justifica haber denominado propiedades contrarias a propiedades que satisfacen la relación (1).

Más en general, es fácil ver que dado dos propiedades contrarias p y q no es posible obtener un estado ρ y una propiedad r para la cual

$$\Pr_{\rho}(p|r)=1 \qquad \text{y} \qquad \Pr_{\rho}(q|r)=1 \tag{3}$$

Para poder definir las probabilidades condicionales anteriores, la propiedades p, q y r tienen que representarse por proyectores que conmuten. Por lo tanto, las probabilidades condicionales se escriben de la siguiente forma

$$\Pr_{\rho}(p|r)=\frac{Tr(\rho\Pi_p\Pi_r)}{Tr(\rho\Pi_r)}=Tr(\rho^*\Pi_p)=\Pr_{\rho^*}(p) \quad \text{y} \quad \Pr_{\rho}(q|r)=Tr(\rho^*\Pi_q)=\Pr_{\rho^*}(q),$$

donde $\rho^*=\dfrac{\Pi_r\rho\Pi_r}{Tr(\Pi_r\rho\Pi_r)}$.

Teniendo en cuenta la ecuación (2) con $\rho=\rho^*$ concluimos que no existe estado ρ y propiedad r para los cuales las ecuaciones (3) puedan ser ambas válidas.

b. Propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes

En la teoría de historias consistentes, *n* contextos de propiedades, cada uno a un tiempo distinto t_j ($j=1,\ldots,n$), que satisfacen las condiciones de consistencia pueden ser usados para definir una familia de historias consistentes, es decir, un conjunto de historias con probabilidades bien definidas. Cada posible familia de historias consistentes es una descripción igualmente válida del sistema. En general no es posible incluir dos familias diferentes en otra más grande. Cuando este es el caso, las familias se consideran descripciones complementarias de un sistema, que no pueden considerarse simultáneamente.

Adrian Kent (2007) fue el primero en señalar que utilizando familias de historias consistentes distintas es posible la retrodicción de propiedades contrarias. Posteriormente, J. B. Hartle (2007) presentó el siguiente ejemplo de inferencia de propiedades contrarias.

Sea un sistema cuántico en un estado representado por $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle+|B\rangle+|C\rangle)$ al tiempo t_0, donde $|A\rangle$, $|B\rangle$ y $|C\rangle$ son tres vectores ortonormales de un espacio de Hilbert de tres dimensiones. Por simplicidad se elige el hamiltoniano igual a cero. Al tiempo $t_2>t_0$ se considera la propiedad Φ, representada por el proyector $P_{\Phi}=|\Phi\rangle\langle\Phi|$, con $|\Phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle+|B\rangle-|C\rangle)$. Luego, la idea es analizar la probabilidad de que el sistema tenga la propiedad A, representada por el proyector $P_A=|A\rangle\langle A|$, a un tiempo intermedio t_1 ($t_0<t_1<t_2$).

Se considera la familia de historias de dos tiempos dada por las propiedades A y su negación $\bar{A}$ ($P_{\bar{A}}=I-P_A$) al tiempo t_1, y por las propiedades Φ y su negación $\bar{\Phi}$ ($P_{\bar{\Phi}}=I-P_{\Phi}$) al tiempo t_2. Esta familia de historias satisface las condiciones de consistencia y a partir de ella se puede obtener el siguiente resultado

$$\Pr_{\psi}(A,t_1 | \Phi,t_2)=1 \qquad \text{y} \qquad \Pr_{\psi}(\bar{A},t_1 | \Phi,t_2)=0 , \tag{4}$$

el cual puede interpretarse como que la propiedad Φ al tiempo t_2 implica a la propiedad A a un tiempo previo $t_1 < t_2$.

Por otro lado, usando una familia consistente distinta, que incluya las propiedades B ($P_B = |B\rangle\langle B|$) y su negación $\bar{B}$ ($P_{\bar{B}} = I - P_B$) al tiempo t_1, y por las propiedades Φ y $\bar{\Phi}$ al tiempo t_2. Esta familia también satisface las condiciones de consistencia, y en este caso se obtiene el siguiente resultado

$$\Pr_{\psi}(B,t_1 | \Phi,t_2)=1 \qquad \text{y} \qquad \Pr_{\psi}(\bar{B},t_1 | \Phi,t_2)=0 \tag{5}$$

el cual puede interpretarse como que la propiedad Φ al tiempo t_2 implica a la propiedad B a un tiempo previo $t_1 < t_2$.

Desde el punto de vista de la teoría de historias consistentes las ecuaciones (4) y (5) no pueden ser interpretadas como un caso de retrodicción de dos propiedades contrarias, ya que se obtuvieron en dos descripciones incompatibles del sistema cuántico, que no pueden ser incluidas en una misma familia de historias consistentes. Sin embargo, algunos autores han considerado que estos resultados son una fuerte objeción a la consistencia interna de la teoría de historias consistentes (Kent, 1997) (Kent, 1998) (Okon, Sudarsky, 2014).

En la siguiente sección se analiza este ejemplo desde la perspectiva del formalismo de contextos generalizados. Además, se demuestra de manera general que en dicho formalismo no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

c.-Propiedades contrarias en el formalismo de Contextos Generalizados

En esta sección vamos a considerar las propiedades contrarias utilizando el formalismo de contextos generalizados. Veremos que en este formalismo no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

Es fácil ver que los proyectores $P_A = |A\rangle\langle A|$ y $P_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ no conmutan, por lo tanto el formalismo de contextos generalizados no permite una descripción del sistema cuántico que incluya a las propiedades A al tiempo t_1 y Φ al tiempo t_2. Luego, las probabilidades condicionales que aparecen en la ecuación (4) no estás siquiera definidas. Por otro lado, los proyectores $P_B = |B\rangle\langle B|$ y $P_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ tampoco conmutan, y por lo tanto las probabilidades condicionales que aparecen en la ecuación (5) tampoco están definidas. Por lo tanto, las historias del ejemplo de la sección anterior no son descripciones válidas para el formalismo de contextos generalizados.

Este resultado puede demostrarse para al caso general. Para ello consideremos un estado ρ_0 al tiempo t_0, dos propiedades contrarias p y q al tiempo $t_1 > t_0$ y otra propiedad r al tiempo $t_2 > t_1$. Veremos que no es posible obtener simultáneamente $\Pr_{\rho_0}(p,t_1 | r,t_2)=1$ y $\Pr_{\rho_0}(q,t_1 | r,t_2)=1$.

Para que las probabilidades condicionales estén bien definidas se deben satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad

y , (6)

donde

, y .

Además, como p y q son propiedades contrarias, sus respectivos proyectores conmutan y, por lo tanto

. (7)

Las relaciones de conmutación dadas en las ecuaciones (6) y (7) son las condiciones de compatibilidad necesarias para considerar un contexto generalizado de dos tiempos que incluya las propiedades contrarias p y q al tiempo t_1 y la propiedad r al tiempo t_2, en el cual las probabilidades condicionales $\Pr_{\rho_0}(p,t_1|r,t_2)$ y $\Pr_{\rho_0}(q,t_1|r,t_2)$ están bien definidas y se expresan de la siguiente manera

$$\Pr_{\rho_0}(p,t_1|r,t_2)=\frac{Tr(\rho_0\Pi_{p,0}\Pi_{r,0})}{Tr(\rho_0\Pi_{r,0})}=1 \quad \text{y} \quad \Pr_{\rho_0}(q,t_1|r,t_2)=\frac{Tr(\rho_0\Pi_{q,0}\Pi_{r,0})}{Tr(\rho_0\Pi_{r,0})}=1. \qquad (8)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación dadas en (6), las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma

$$\Pr_{\rho_0}(p,t_1|r,t_2)=Tr(\rho_0^*\Pi_{p,0})=1\ , \qquad \Pr_{\rho_0}(p,t_1|r,t_2)=Tr(\rho_0^*\Pi_{p,0})=1\,,$$

con $\rho_0^*=\dfrac{\Pi_{r,0}\rho_0\Pi_{r,0}}{Tr(\Pi_{r,0}\rho_0\Pi_{r,0})}$.

Como y representan propiedades contrarias al mismo tiempo t_0 y ρ_0^* es un estado cuántico, siguiendo el mismo razonamiento que en la sección (III.a.), concluimos que no existe ρ_0^* para el cual las ecuaciones (8) sean ambas válidas. Por lo tanto, no es posible la retrodicción de propiedades contrarias en el formalismo de contextos generalizados.

Conclusiones

La interpretación estándar de la mecánica cuántica provee un exitoso algoritmo para predecir los resultados de las mediciones experimentales. Si bien el formalismo estándar de la mecánica cuántica permite definir operaciones lógicas entre propiedades, como todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo, no es posible combinar propiedades a distintos tiempos. Sin embargo, en muchos procesos físicos es necesario considerar expresiones que involucren propiedades en diferentes instantes.

Para superar estas dificultades se desarrollaron diferentes teorías de historias cuánticas, entre ellas la teoría de historias consistentes y el formalismo de contextos generalizados. Estas teorías introducen la noción de historia, que generaliza a la noción de evento, y de este modo extienden el formalismo estándar de la mecánica cuántica de modo tal de poder definir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos.

Las condiciones que impone la teoría de historias consistentes sobras las familias de historias es menos restrictiva que las del formalismo de contextos generalizados. Por esta razón permite demasiadas familias de historias, algunas de las cuales son de difícil interpretación. En particular, se ha mostrado que en la teoría de historias consistentes la excesiva libertad de familias de historias hace posible la retrodicción de propiedades contrarias (Kent, 1997).

Uno de los autores y Leonardo Vanni desarrollaron como alternativa a la teoría de historias consistentes el formalismo de contextos generalizados (Laura, Vanni, 2008) cuya característica distintiva es que la condición de consistencia se impone para todos los estados cuánticos. Esta nueva condición, al ser más limitativa, ha mostrado ser beneficiosa para solucionar algunos problemas que aparecen en la teoría de historias consistentes, entre ellos la retrodicción de propiedades contrarias (Losada, Laura, 2014).

En este trabajo se analizó si la posibilidad de inferir propiedades contrarias en el formalismo estándar de la mecánica cuántica. En la sección III.a. se mostró que dado dos propiedades contrarias p y q, no existe ningún estado ni propiedad *r* para los cuales la probabilidad condicional de p dado r y la probabilidad condicional de q dado r puedan ser ambas iguales a uno. Por lo tanto, no hay lugar para las inferencias de propiedades contrarias en la mecánica cuántica ordinaria.

Luego, en la III.b. se analizó la posibilidad de inferencias contrarias en la teoría de contextos generalizados. Se mostró, presentado un ejemplo desarrollado por Hartle, que sí es posible realizar retrodicciones de propiedades contrarias en esta teoría. Más específicamente, se mostró que es posible encontrar un estado al tiempo t_0, dos propiedades contrarias p y q al tiempo $t_1 > t_0$ y una tercera propiedad r al tiempo $t_2 > t_1$ tales que la probabilidad condicional de p dado r y la probabilidad condicional de q dado r sean ambas iguales a uno. Aunque estas probabilidades condicionales están definidas en diferentes conjuntos de historias consistentes, algunos autores han considerado este hecho como un problema de consistencia lógica de esta teoría.

Por último, se analizó este problema utilizando nuestro formalismo de contextos generalizados. En la sección III.c. se mostró que el ejemplo presentado por Hartle utiliza historias que no son admisibles en este formalismo y, por lo tanto, no es un caso de retrodicción de propiedades contrarias. Además, se demostró de manera general que no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

Como se explicó en la sección II, los contextos generalizados de historias cuánticas tienen la estructura de reticulado distributivo ortocomplementado, es decir, la misma estructura que las propiedades cuánticas de un contexto ordinario. Es debido a esta estructura que en el formalismo de contextos generalizados no hay lugar para la retrodicción de propiedades contrarias.

Aunque la ausencia de propiedades contrarias puede considerarse una ventaja de este formalismo, se debe considerar la posibilidad de que ciertas historias con relevancia física sean eliminadas por él. Aún no tenemos un resultado definitivo al respecto. En el futuro profundizaremos nuestra investigación sobre esta cuestión.

Bibliografía

BALLENTINE, L. (1998). *Quantum Mechanics. A modern Development*. Singapur: World Scientific.

BIRKHOFF, G. Y VON NEUMANN, J. (1936). "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, **37**: 823-843.

COHEN, D. (1989). *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*. Nueva York: Springer-Verlag.

DOWKER, F. Y KENT, A. (1996). "On the Consistent Histories Approach to Quantum Mechanics", *Journal of Statistical Physics.* 82 1575-1646.

GELL-MANN, M. Y HARTLE, J. B. (1990). "Quantum Mechanics in the Light of Quantum Cosmology", en W. Zurek (ed.), *Complexity, Entropy and the Physics of Information*. Reading: Addison-Wesley.

GRIFFITHS, R. (1984). *"Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics", Journal of Statistical Physics*, 36: 219-272.

GRIFFITHS, R. (2002). *Consistent Quantum Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

GRIFFITHS, R. (2013). "A consistent quantum ontology", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **44**: 93-114.

GRIFFITHS, R. Y HARTLE, J. B. (1998). "Comment on 'Consistent Sets Yield Contrary Inferences in Quantum Theory' ", *Physical Review Letters*, 81, 1981.

HARTLE, J. B. (2007). "Quantum physics and human language", *Journal of Physics A,* 40 3101-3121.

KENT, A. (1997). "Consistent Sets Yield Contrary Inferences in Quantum Theory", *Physical Review Letters,* 78 2874-2877.

KENT, A. (1998). "Consistent Sets and Contrary Inferences: Reply to Griffiths and Hartle", *Physical Review Letters*, 81 1982.

LALOË, F. (2001). "Do we really understand quantum mechanics?", *American Journal of Physics,* 69 655 - 701

LAURA, R. Y VANNI, L. (2008). *International Journal of Theoretical Physics*.

LAURA, R. Y VANNI, L. (2008b). *Epistemología e Historia de la Ciencia*.

LAURA, R. Y VANNI, L. (2009). *Foundations of Physics*.

LOMBARDI, O. Y DIEKS, D. (2012). "Modal interpretations of quantum mechanics", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Stanford University.

LOSADA, M. Y LAURA, R. (2013). *International Journal of Theoretical Physics*.

LOSADA, M. Y LAURA, R. (2014). *Annals of Physics*.

LOSADA, M. Y LAURA, R. (2014b). *Annals of Physics*.

LOSADA, M., VANNI, L. Y LAURA, R. (2013). *Physical Review A*.

MITTELSTAEDT, P. (1978). *Quantun Logic,* D. Reidel Publishing Company.

OKON, E. Y SUDARSKY, D. (2014). "On the Consistency of the Consistent Histories

Approach to Quantum Mechanics", *Foundations of Physics* 44 19-33.
OMNÈS, R. (1988). "Logical Reformulation of Quantum Mechanics. I. Foundations", *Journal of Statistical Physics*, 53: 893-932.
OMNÉS, R. (1994). *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
OMNÈS, R. (1999). *Understanding Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
VANNI, L. Y LAURA, R. (2013). *International Journal of Theoretical Physics*.
VON NEUMANN, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.